

Title	Stochastic Resonance in Spin-Boson System
Author(s)	今福, 健太郎; 湯浅, 一哉; 大場, 一郎
Citation	物性研究 (2000), 73(4): 611-625
Issue Date	2000-01-20
URL	http://hdl.handle.net/2433/96770
Right	
Type	Departmental Bulletin Paper
Textversion	publisher

Stochastic Resonance in Spin-Boson System

今福健太郎,* 湯浅一哉, 大場一郎 (早大理工物理†)

概要

確率極限近似をスピン・ボゾン系に適用し、量子論的に導入される揺動と散逸による線形応答の増幅現象（確率共鳴現象）について考察する。古典的確率共鳴現象について簡単に紹介し、量子系における確率共鳴現象を調べる意味とそのモデル（スピン・ボゾン系）について述べた後、確率極限近似とそれによって計算される線形応答の振幅の振る舞いを説明する。

参考項目：確率共鳴現象、スピン・ボゾン系、確率極限近似、スピン緩和現象、ラムシフト、揺動散逸定理、線形応答

1 確率共鳴現象 — 氷河期の周期はどこからくるか？ —

— ノイズが信号を増幅する !! — 一見、不可思議な現象が 80 年代初頭、地学者の Benzi らによって発見された [1]。この現象はその後「確率共鳴現象」として広く研究されることになる [2, 3]。彼らは「氷河期の周期がどこからくるか」という地学学者達を古くから悩ませている問題にアプローチしていたが、この発見により「確率共鳴現象」がその解答になり得ることを示したのである。

確率共鳴現象の一つの重要な例として彼らのアイディアを紹介することにしよう。まずは、当時の地学者の知識と問題点を整理してみる。

1. 100 万年分の地質的調査によるとほぼ 10 万年周期で氷河期は繰り返すことがわかっている。
2. 地球的規模の運動の中で、同じタイムスケールをもつものを探すと、木星からの重力による地球の公転軌道のほんのわずかな「ずれ」が同じく 10 万年周期である。
3. ところが、この揺らぎは小さ過ぎて（地表面における太陽からのエネルギーフラックスをわずか 0.1 % しか変化させない）氷河期や間氷河といった大きな変動を起こす原因にはなり得そうにない。
4. 他に原因があるのか、あるいは、小さな原因を大きな影響に導くメカニズムが存在するのか。

このような状況の中で Benzi らは次のような簡単なモデルを使い公転軌道のほんのわずかなずれが“ノイズの助け”によって、氷河期の周期的な出現という大きな変動の原因になり得ることを示したのである。

図 1 を見ていただきたい。二つの極小点をもつポテンシャルの中に存在する質点を考えている。質点の位置は「地球の状態」に対応し、一つの極小点は氷河状態、もう一つは間氷期の状態に対応している。¹ 何もしなければ質点はいつまでも一つの極小点にとどまり続けるような状況が設定されていることに注意しよう。次に前述の公転軌道の周期的なずれの効果として二つの極小点の間の移動を多少助ける摂動を入れる。ただし太陽からのエネルギーフラックスの変化が極端に小さいことを反映

*e-mail: imafuku@mn.waseda.ac.jp

†〒169-8555 東京都新宿区大久保 3-4-1

¹このモデルの背景については [3] を参照してください。

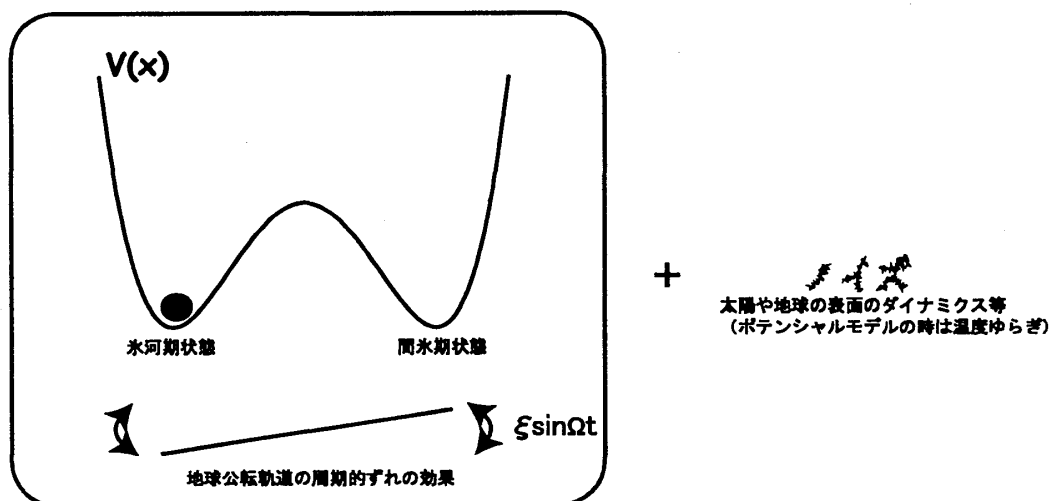


図 1: 氷河期の周期はどこからくるか?

して、その効果だけでは山を越えられないほど、小さな摂動を考えている。Benzi らのアイディアは、さらに短い時間スケールの摂動をホワイトノイズとして取り入れることであった。すなわち、質点の運動が、伊藤型ランジュバン方程式

$$dx(t) = - \left(\frac{d}{dx} V(x)_{x=x(t)} - \xi \sin \Omega t \right) dt + dw(t) \quad (1)$$

$$\langle dw(t) \rangle = 0, \quad \langle dw(t) dw(t) \rangle = 2\alpha dt \quad (2)$$

で記述される系を考えたのである。ホワイトノイズは、太陽表面に見られる突発的なフレアの成長や、地球表面の大気や海流の変化など「10 万年」に較べ非常に短いタイムスケールをもつ現象をモデル化したものであると考えることができるが、彼らはこのシステムについて数値計算を行い、摂動 $\xi \sin \Omega t$ に対する線形応答の振幅²がある α で最大となる現象、すなわちノイズによる信号の増幅現象“確率共鳴現象”を発見した。(詳しくは原論文 [1] あるいは [2] を参考にしてください。)

この発見の後、確率共鳴現象はいろいろな場面で議論されている。大きく分けると Benzi のモデルの拡張ともいえる多安定状態間遷移を問題にする場合と、化学反応系にみられるような閾値反応を問題にする場合の二つに分類することができる。後者にも、ザリガニの尾の鞭毛細胞中に存在する神経を使った実験の例など、面白い例があり「確率共鳴現象」が自然界に広く存在し、普遍的な概念であることを示している。

このような背景のもと、物理の分野においてもたくさんの研究がなされている。解析的な分析も進み、熱浴中の二重井戸型ポテンシャルモデル³でも共鳴をあたえる温度 T_c の存在が示されている。本

²正しくは摂動に対する線形応答の振幅をシグナルとしたときのシグナルーノイズ比。

³Benzi モデルでノイズを温度による揺動としてあつかうもの。このモデルを古典的に扱えば、揺動散逸定理によりノイズの大きさを表すパラメータ α は、ほぼ温度そのものである。

研究の方針は、この「熱浴中の二重井戸型ポテンシャルモデル」の量子スケールでの振る舞いを、“次章で述べられる問題意識をもって”調べることにある。

2 量子論的確率共鳴現象を考える－何が問題なのか－

本研究の目的は量子スケールでの確率共鳴現象を調べることにある。「古典系で見られる現象が量子系でどうなるか？」という、ある意味で単純な問題意識とも言えるが、具体的な解析に移る前にこの問題を考える意味について触れておくことにする。

2.1 量子論における“ノイズ”とはなにか？

ここでは、確率共鳴で本質的な役割を果たす“ノイズ”の量子論的扱いについて考える。量子論的に確率共鳴を論じる場合、何らかの意味で量子論的なノイズの導入が必要であることは明らかである。しかしながら、量子力学のそもそもの適用対象が孤立系であることを考えると、孤立系の時間発展は（たとえばシュレーディンガー方程式により）決定論的に発展しているのだから、純粋に量子論的な議論の中には“ノイズ”という概念が存在しないことになる。すなわち、確率共鳴を量子論的に考察するためには、ノイズという概念をある意味において外から与えなければならない。

これと似た事情は、たとえば量子的コヒーレンスの消失の問題等に見ることができる。この問題は「量子力学」の基本的問題とされているが、純粋に有限自由度の量子力学を解いていても決してデ・コヒーレンスは起こらない。しかしながら、現実問題としてスピン緩和などデ・コヒーレンスの概念は重要なので、これまでこの問題に対するいくつかの解決方法が提案されている⁴。その代表的なアプローチとして、全体としては量子論で扱いながらなにかしらの“タネ”を導入し問題を扱う方法がある。“タネ”は

無限自由度との結合や部分トレースや粗視化 (3)

であり、「マクロ」を表現する具体的手段として導入される。そして何より重要なのは、このような扱いがある意味で非常によく機能する⁵ことにある。具体的には、

散逸と揺動の関係を計算すると高温極限で古典的揺動散逸定理に一致する (4)

ことなど控えめに言っても、「もっともらしい」結果を導出することができる。

ここで、“量子論的ノイズ”について立ち戻って考えてみると、実は(3)の方針によって計算された際にシステムに現れる影響を“量子論的ノイズ”と呼ぶことの根拠を(4)が与えているように見える。そこで今回はこのような立場に立って“量子論的ノイズ”を導入し（具体的には4章を参照のこと）、問題を設定することにする。逆にいえば(4)を理由にして導入された“量子論的ノイズ”が、古典的ノイズと同様に確率共鳴を引き起こすかどうかの一つの焦点となる。

以上を整理すると、「(4)の見方からさらに踏み込んで“量子論的ノイズ”の性質を理解するために、(3)の方法により導入される“量子論的ノイズ”がダイナミクスへどのような影響を及ぼすのかについて、(確率共鳴との関連から)議論する」ことが我々の一つの目的であるといえる。

⁴ここでは単純な「解釈」を解決方法とは呼ばないことにします。

⁵機能するということと基礎論としていいかどうかは、別かかもしれませんが。

3 モデル — スピン・ボゾン系 —

この章では、本論文で考察されるスピン・ボゾンモデルについて、二重井戸型ポテンシャルとの関連を示唆しながら紹介する。

3.1 注目するシステム（スピン系）

図2のような二重井戸型ポテンシャルを考える。さらにこのシステムと相互作用する系の温度等、エネルギースケールが十分に小さな場合を考えることにする⁶。この場合トンネル振幅を与えるパラメータ Δ に依存してスプリットした下の二準位のみが系のダイナミクスを決定し、本質的に大きさ $1/2$ のスピン系と同じである。仮に $\Delta = 0$ の場合を考えると、左に局在した状態 $|L\rangle$ と右に局在した状態 $|R\rangle$ が定義できるが、この2つの状態を基底にしてハミルトニアンを以下のように書くことができる。

$$H_s = \frac{\epsilon}{2} (|L\rangle\langle L| - |R\rangle\langle R|) + \frac{\Delta}{2} (|R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R|) \quad (5)$$

ただし、左状態 $|L\rangle$ と右状態 $|R\rangle$ のエネルギーの差を ϵ と置いた。この系におけるエネルギーのスプリット幅 ω_0 はもちろん、

$$\omega_0 = \sqrt{\epsilon^2 + \Delta^2} \quad (6)$$

で与えられ、 H_s の固有状態 $|\pm\rangle$ を

$$H_s |\pm\rangle = \pm \frac{\omega_0}{2} |\pm\rangle \quad (7)$$

で定義しておく。すなわち (5) は

$$H_s = \frac{\omega_0}{2} (|+\rangle\langle +| - |-\rangle\langle -|) \quad (8)$$

である。

ここで左右どちらに存在するかを表す、オーダーパラメータの役割を果たす演算子 X が

$$X = |R\rangle\langle R| - |L\rangle\langle L| \quad (9)$$

であることを注意しておこう。

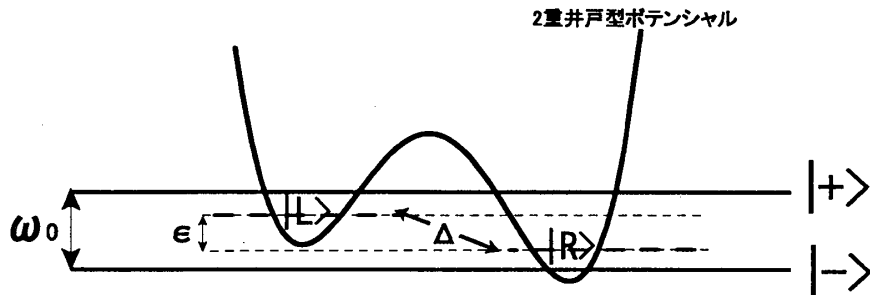


図 2: 二重井戸型ポテンシャルと二準位モデル

⁶ 量子的な効果よりも温度の効果が大きいような系にはそもそも興味がないから。

また外から加えられる摂動として、

$$H_a = \xi X \sin \Omega t \quad (10)$$

を考えることにする。⁷

3.2 環境系（ボソン系）

本論文では、前節で述べたシステムと相互作用する（いわゆる）環境系はボソンの集合であるとし、そのフリーハミルトニアン H_b は

$$H_b = \int_0^\infty dk \, \omega_k a_k^\dagger a_k \quad (11)$$

であるとする。ただし a_k^\dagger, a_k はボソンの生成、消滅演算子であり、

$$[a_k, a_{k'}^\dagger] = \delta(k - k'), \quad (\text{others}) = 0 \quad (12)$$

を満たす。また $\omega_k > 0$ を仮定しておく。

3.3 相互作用ハミルトニアン

上の二つのシステム（注目するシステムと環境系）の相互作用を

$$H_I = \lambda V = \lambda Y \int_0^\infty dk \, (g_k a_k^\dagger + g_k^* a_k) \quad (13)$$

で与える。 λ は無次元化された結合定数、 Y はシステムのエルミート演算子である。 g_k はどのモードのボソンがシステムとどれだけ結合しているかを決定する関数であり構造因子⁸と呼ばれ、

$$\int_0^\infty dk |g_k|^2 < \infty \quad (14)$$

を満たしている。ここでオペレータ Y の決定について注意しておこう。あとの計算からわかるように Y の決定は、実際に解析したい実験状況に応じて適当に行わなければならない。たとえば $Y = X$ と選ぶと $\Delta = 0$ の場合は緩和現象を記述できない（(32) 参照）。また $\epsilon = 0$ の場合、周波数シフトは常に0になる（(33) 参照）。即ち (5) と実際に観測される現象に応じて Y を決定する必要があるが、今回は $Y = X$ を選択することにする。⁹

以上まとめると、本論文で考察される系は全ハミルトニアン

$$H_{tot} = H_0 + H_a + H_I, \quad H_0 = H_s + H_b, \quad H_I = \lambda V \quad (15)$$

により記述されるものである。

⁷他の加え方（例えば $H_a' = \xi(|R\rangle\langle L| + |L\rangle\langle R|) \sin \Omega t$ ）も考えられるが、ポテンシャルモデルにおける摂動の与え方に対応するものと考えて今回はこれを採用した。

⁸脚注 13 を参照

⁹詳しくは 4.2 章を参照のこと。

4 確率極限近似

今回我々はハミルトニアン (15) で記述される系に確率極限近似 [4, 5] を適用しその解析を行った。確率極限近似は、時間に関する「粗視化」の（一つの）方法と考えることができる。相互作用の強さで決まるスケール変換を時間に対して行った後、弱結合極限をとることによって実現される。数学的な定式化は L. Accardi らによっておこなわれているが [4]、詳細は彼らの論文にまかせ、ここではスピン・ボソンモデルに適用する場合について [5] に基づいてレビューを行う。なおこの章では、簡単のため $\xi = 0$ の（周期的外場がない）場合を考えることにする。

4.1 量子ランジュバン方程式

ハミルトニアン (15) による時間発展方程式を相互作用描像により書くと

$$\frac{d}{dt}U_I^{(\lambda)}(t) = -i\lambda V_I(t)U_I^{(\lambda)}(t), \quad V_I(t) = e^{iH_0 t} V e^{-iH_0 t}, \quad U_I(0) = 1 \quad (16)$$

であるから、具体的に計算して

$$\frac{d}{dt}U_I^{(\lambda)}(t) = -i\lambda \sum_{\alpha} \left(D_{\alpha} A_{\alpha}^{\dagger}(t) + D_{\alpha}^{\dagger} A_{\alpha}(t) \right) U_I^{(\lambda)}(t) \quad (17)$$

$$D_{\pm} = |\pm\rangle\langle\mp|, \quad D_0 = |+\rangle\langle+| - |-\rangle\langle-| \quad (18)$$

$$A_{\pm}(t) = \frac{\Delta}{\omega_0} \int dk g_k^* a_k e^{-i(\omega_k \pm \omega_0)t}, \quad A_0(t) = \frac{\epsilon}{\omega_0} \int dk g_k^* a_k e^{-i\omega_k t} \quad (19)$$

を得る。ここまでは通常の量子力学そのものである。

さて、確率極限近似の手続きに移ろう。時間変数 t についてスケール変換を行い $t = \tau/\lambda^2$ を代入すると

$$\frac{d}{d\tau}U_I^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2) = -i\frac{1}{\lambda} \sum_{\alpha} \left(D_{\alpha} A_{\alpha}^{\dagger}(\tau/\lambda^2) + D_{\alpha}^{\dagger} A_{\alpha}(\tau/\lambda^2) \right) U_I^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2) \quad (20)$$

が得られる。ここで弱結合極限 $\lambda \rightarrow 0$ をとると、

$$\frac{1}{\lambda} A_{\alpha}(\tau/\lambda^2) \rightarrow b_{\alpha}(\tau), \quad \frac{1}{\lambda} A_{\alpha}^{\dagger}(\tau/\lambda^2) \rightarrow b_{\alpha}^{\dagger}(\tau), \quad U_I^{(\lambda)}(\tau/\lambda^2) \rightarrow U_I(\tau) \quad (21)$$

のように各オペレーターの「極限」が存在する¹⁰ことが示され、(20) は形式的に

$$\frac{d}{d\tau}U_I(\tau) = -i \sum_{\alpha} \left(D_{\alpha} b_{\alpha}^{\dagger}(\tau) + D_{\alpha}^{\dagger} b_{\alpha}(\tau) \right) U_I(\tau) \quad (22)$$

と書くことができる。(21) で定義されるオペレータについて調べると

$$[b_{-}(\tau), b_{-}^{\dagger}(s)] = 2\gamma\delta(\tau - s), \quad (\text{others}) = 0, \quad (23)$$

$$\gamma = \left(\frac{\Delta}{\omega_0} \right)^2 J(\omega_0), \quad J(\omega) = \pi \int dk |g_k|^2 \delta(\omega_k - \omega) \quad (24)$$

¹⁰行列要素に対して極限が存在するという意味。詳しくは [4, 5] を参照のこと。

および

$$[b_{\pm}(\tau), U_I(\tau)] = -i \left(\frac{\Delta}{\omega_0} \right)^2 \gamma(\mp \omega_0) D_{\pm} U_I(\tau), \quad [b_0(\tau), U_I(\tau)] = -i \left(\frac{\epsilon}{\omega_0} \right)^2 \gamma(0) D_{\pm} U_I(\tau) \quad (25)$$

$$\gamma(\omega) = J(\omega) - iI(\omega), \quad I(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega' - \omega} \quad (26)$$

が成立している。(23)により(22)が量子ランジュバン方程式と呼ぶにふさわしい方程式であることが理解できるが、それと同時に(22)は、よく定義されていない方程式であることもわかる。¹¹ しながら、(25)を使えば $b_{\alpha}, b_{\alpha}^{\dagger}$ で定義されるフォックススペースによる U_I の行列要素に対する方程式として、(22)を書きなおすことが常に可能であり、物理量はこの「正則化」により計算可能となる。例えば $\tau < 0$ でスピン系とボソン系の間に相互作用がなく、かつボソン系が真空状態に用意された状況について、この方針によりシステムのオペレータ D_{α} の時間発展（ハイゼンベルグ表示）を考察すると¹²その運動方程式が、

$$\frac{d}{d\tau} D_{\pm}(\tau) = -(\gamma \mp i\omega_R) D_{\pm}(\tau), \quad \frac{d}{d\tau} D_0(\tau) = -2\gamma D_0(\tau) - 2\gamma \quad (27)$$

となることから

$$D_{\pm}(\tau) = D_{\pm} e^{-(\gamma \mp i\omega_R)\tau}, \quad D_0(\tau) = (D_0 + 1)e^{-2\gamma\tau} - 1, \quad (28)$$

$$\omega_R = \omega_0/\lambda^2 - \sigma = \tilde{\omega}_0 - \sigma \quad (29)$$

が得られる。ただし γ は(24)で与えられる緩和定数であり σ は

$$\sigma = \left(\frac{\epsilon}{\omega_0} \right)^2 (I(\omega_0) - I(-\omega_0)) \quad (30)$$

で計算される周波数シフトである。ボソン系との相互作用の影響はこの二つの量にすべて含まれ、かつ構造因子 $J(\omega)$ ¹³を通じて関連していることに注意してほしい。これらの計算は（例えば TFD 法 [6] により）有限温度の場合¹⁴にも直ちに拡張することができて、その結果は

$$D_{\pm}(\tau) = D_{\pm} e^{-(\gamma^{\beta} \mp i\omega_R^{\beta})\tau}, \quad D_0(\tau) = \left(D_0 + \frac{\gamma^{\beta}}{\gamma} \right) e^{-2\gamma^{\beta}\tau} - \frac{\gamma^{\beta}}{\gamma} \quad (31)$$

$$\gamma^{\beta} = \gamma \coth \frac{1}{2}\beta\omega_0, \quad \omega_R^{\beta} = \omega_0/\lambda^2 - \sigma^{\beta} = \tilde{\omega}_0 - \sigma^{\beta}, \quad (32)$$

$$\sigma^{\beta} = \left(\frac{\epsilon}{\omega_0} \right)^2 (I^{\beta}(\omega_0) - I^{\beta}(-\omega_0)), \quad I^{\beta}(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega' - \omega} \coth \frac{1}{2}\beta\omega' \quad (33)$$

となる。ボソン系との相互作用の影響が緩和定数と周波数シフトにすべて含まれる点は、真空の場合の計算と変わりがない。(31)からボソン系について縮約された密度演算子 $\text{tr}_b(\rho(t))$ が熱平衡状態の解に漸近すること、すなわち

$$\text{tr}_b(\rho(\tau)) \rightarrow \frac{1}{Z_s} \exp(-\beta H_s), \quad (\tau \rightarrow \infty), \quad (34)$$

$$Z_s = \text{tr}_s(\exp(-\beta H_s)) \quad (35)$$

が確認できる。

¹¹ 古典的確率微分方程式における「積」の定義に対応するものが足りないから。

¹² $\rho(\tau)$ を全体系の密度行列だとすれば $D_{\alpha}(\tau) = \text{tr}_b(D_{\alpha}\rho(\tau))$ を求めるということ。 $D_{\alpha}(\tau)$ はオペレータであることに注意。また、 $\rho(0) = \rho_s(0) \otimes \rho_b(0)$ であり、ここでは特に $\rho_b(0) = |0\rangle\langle 0|$ （真空）を採用している。

¹³ ここでは g_k も $J(\omega)$ も構造因子と呼ぶことにする。二つの関数の関係は(24)で与えられる。

¹⁴ $\rho_b(0) = \frac{1}{Z} \exp(-\beta H_b)$, $(Z = \text{tr}_b(\exp(-\beta H_b)), \beta = (kT)^{-1})$ の場合。

4.2 確率極限近似に対するコメント

次章の計算を行う際の我々の立場を明確にするために、この近似方法について幾つかのコメント¹⁵しておこう。

上述の計算からわかるように、確率極限近似により、新たなタイムスケール $\tau = t/\lambda^2$ が導入され注目するシステムの運動はこの τ で記述されている。また、(23) を成立させるためには、ボソン系の特徴的なタイムスケール（例えばボソン系の緩和時間など）は、もともとのタイムスケール t で記述される量であって、 τ と比較して無限小でなければならない。これらの関係はそれぞれの系を特徴付けるエネルギースケールによって表現すれば

$$\frac{\text{システムを特徴付けるエネルギースケール}}{\text{ボソン系を特徴付けるエネルギースケール}} \sim \lambda^2 \quad (36)$$

と書くことができる。これは (29) や (32) に見られるように、システムの固有値 ω_0 はスケール $1/\tau (= \lambda^2/t)$ で測定されたときに有限値 $\tilde{\omega}_0$ を持つような状況が想定されていることを意味している。温度に関しても同様に、システムにとって意味のある温度として、 $\tilde{\omega}_0$ を単位として測定したときに有限値 $\tilde{\beta}$ をもつ温度が想定されており、上記の β とは $\omega_0\beta = \tilde{\omega}_0\tilde{\beta}$ の関係にある。 $\lambda \rightarrow 0$ は、システムとボソン系のそれぞれを支配している二つの時間スケールを分離するための数学的な手法であり、(36) で見積もられる λ が結合定数と同じ程度の値を持ち、かつ $\lambda \ll 1$ を満たす系ときに有効な近似方法なのである。

ここで、前述の（脚注9） Y の選びかたも含めて、ここで導出された緩和定数その他の量の扱いについて考えておこう。実験との比較を考えてみると、(31) をみれば $\tilde{\omega}_0, \gamma^\beta, \sigma^\beta$ の3つの量を実験的に決定すれば、すべての量の振る舞いを理論的に予測することができることが理解できる。 $\tilde{\omega}_0$ は例えばある温度における熱平衡分布を調べれば実験的に得ることができ、 γ^β と σ^β は緩和過程の直接測定より得ることができるであろう。このように半現象論的に (31) を利用する立場により、我々は二準位系における緩和現象のダイナミクスを (31) により予測することが可能である。この立場に立つと、そもそもミクロなハミルトニアンの詳細は全く問題とならず、 Y の選び方を気にする必要もなくなる。この立場で考える限り、ミクロな立場からの (31) の導出自身は形式的な問題としてのみ重要であり、本当に必要なのは (31) の形そのものであることになる。しかしながら、最近の実験技術の進歩によりもう一歩踏み込んだ立場をとることも可能であることに注意して欲しい。たとえば Cavity QED の実験では空洞中の電磁場のモード ((15) の構造因子 $J(\omega)$ にあたるもの) を制御し、それと相互作用する原子の不安定状態の寿命 τ_{rec} ($1/\gamma^\beta$ に対応) を延ばすことなどが実際に行われている。このような実験を理解するためには $J(\omega)$ と γ^β の関係を理論的に“導出”することが必要であり、そのためにはミクロな意味で系を記述しておく必要がある。今回扱ったスピン・ボゾンモデルは、非常に単純化されたモデルであり実際の系との対応は必ずしもいいものではないが、何らかの近似として (15) のシステムがミクロな意味で用意することは十分に現実可能であろう。このような立場では構造因子 $J(\omega)$ がインプットでありここで計算された $\gamma^\beta, \sigma^\beta$ の温度依存性などはそれ自体は理論からのアウトプットなのである。もちろん (15) が本当にミクロな意味で実験的に用意されない限り、例えばなんらかの繰り込み処方が必要な場合も考えられる。しかしながら何をどのように繰り込むかは実験状況に依存して決められるものであり、今回はハミルトニアン (15) がミクロな意味で用意されたと考えることにより、以後の話題を進めることにする。

¹⁵ 原論文 [4, 5] の著者たちと多少立場が違うかもしれません。

5 スピン・ボゾン系における確率共鳴現象

我々はハミルトニアン (15) で記述される系に対し上述の確率極限近似を用いて解析を行った。 $H_a(10)$ で与えられる周期的外力に対するオーダーパラメータ (9) の期待値の線形応答を摂動論により調べると、

$$\text{tr}(X\rho(\tau)) \rightarrow -\frac{\epsilon}{\omega_0} \tanh \frac{1}{2}\beta\omega_0 + \tilde{\xi} A^\beta \sin(\tilde{\Omega}\tau - \phi^\beta) \quad \text{for } \tau \gg 1/\gamma^\beta \quad (37)$$

$$A^\beta = \frac{\omega_R^\beta (\Delta/\omega_0)^2}{\sqrt{(\omega_R^{\beta 2} - \tilde{\Omega}^2 + \gamma^{\beta 2}) + (2\gamma^\beta \tilde{\Omega})^2}} \tanh \frac{1}{2}\beta\omega_0 \quad (38)$$

$$\left(\tilde{\Omega}\tau = \Omega t, \quad \tilde{\xi} = \lambda^2 \xi, \quad \phi^\beta = \tan^{-1} \frac{2\gamma^\beta \tilde{\Omega}}{\omega_R^{\beta 2} - \tilde{\Omega}^2 + \gamma^{\beta 2}} \right) \quad (39)$$

を得る。言うまでもなく、第1項は熱平衡分布からの寄与であり第2項が線形応答の部分である。このシステムにおいてノイズの大きさを調節する重要なパラメータは2つある。一つは古典論と同じく温度であり、もう一つはスピン系とボゾン系の間の結合定数である。結合定数の強さを調節するパラメータ η を

$$\lambda = \sqrt{\eta} \tilde{\lambda} \quad (\eta > 0) \quad (40)$$

によって導入しよう。弱結合極限は $\tilde{\lambda} \rightarrow 0$ によって実現される。このとき緩和定数 γ^β や周波数シフト σ^β は

$$\gamma^\beta = \eta \tilde{\gamma}^\beta = \tilde{\gamma} \eta^\beta, \quad \sigma^\beta = \eta \tilde{\sigma}^\beta \quad (41)$$

となる。ただし、

$$\tilde{\gamma}^\beta = \tilde{\gamma} \coth \frac{1}{2}\beta\omega_0, \quad \tilde{\gamma} = \left(\frac{\Delta}{\omega_0} \right)^2 J(\omega_0), \quad \eta^\beta = \eta \coth \frac{1}{2}\beta\omega_0, \quad (42)$$

$$\tilde{\sigma}^\beta = \left(\frac{\epsilon}{\omega} \right)^2 \left(I^\beta(\omega_0) - I^\beta(-\omega_0) \right), \quad I^\beta(\omega) = \frac{1}{\pi} \mathcal{P} \int d\omega' \frac{J(\omega')}{\omega' - \omega} \coth \frac{1}{2}\beta\omega' \quad (43)$$

であり、(42) で与えられる η^β は無次元化されたノイズである。我々はこの η^β と (38) の振幅 A^β により、シグナル・ノイズ比 SNR を

$$SNR = |A^\beta|/\eta^\beta = \frac{1}{\eta} \frac{|\omega_R^\beta|}{\sqrt{(\omega_R^{\beta 2} - \tilde{\Omega}^2 + \gamma^{\beta 2}) + (2\gamma^\beta \tilde{\Omega})^2}} \tanh^2 \frac{1}{2}\beta\omega_0 \quad (44)$$

と定義してその振る舞いを調べた。¹⁶ η と温度の両方のパラメータに対する (44) の依存性を調べ、「ノイズによる信号 (SNR) の増幅」があるかどうかを調べることにする。

今回は (42)、(43) を評価するにあたり $J(\omega)$ として図3のような二つの代表的な例について考察を行った。(14) より $J(\omega)$ も規格化可能な分布となるが、(42)、(43) の評価の際に重要なのは必要な ω_0 近傍の様子である。この付近の様子について $J(\omega)$ が ω に比例する (I) オーミックケースと ω に依存しない (II) コンスタントケースの二つを考えることにする。これらは γ^β の値が等しくなるように選んでおり¹⁷その違いは図4に示したように σ^β の温度依存性に現れる。図5は η -温度平面における

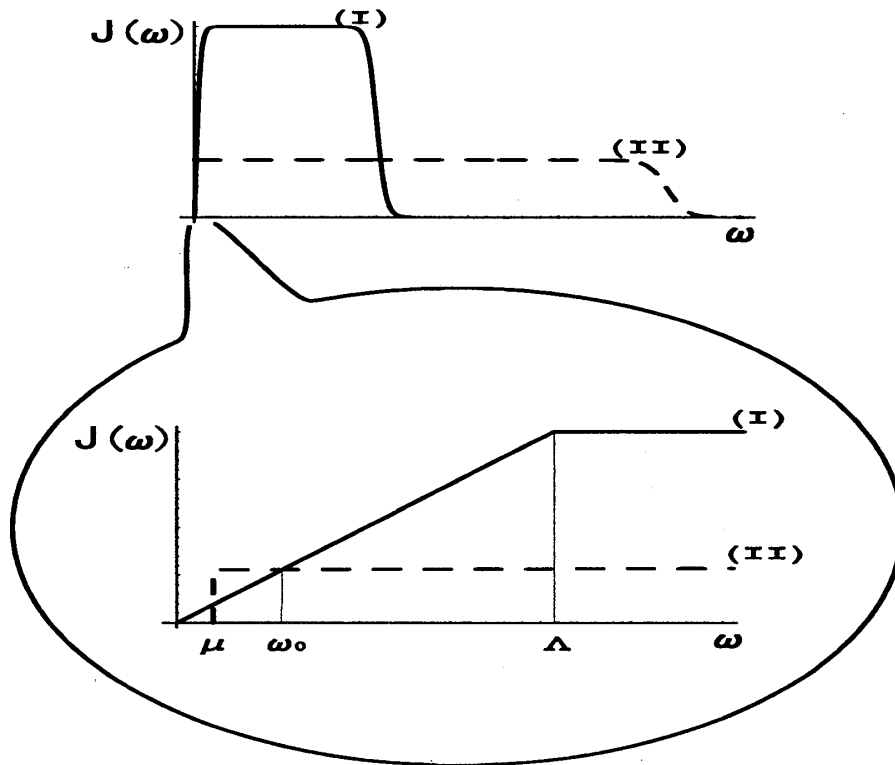


図 3: 今回用いた 2 つの $J(\omega)$ の概念図。 ω_0 の近傍の振る舞いにより (I) オーミックケース、(II) コンスタントケースと呼ぶことにする。後の計算では、 $\Lambda/\omega_0 = 10$, $\mu/\omega_0 = 0.5$ と選んだ。

SNR の等高線グラフである。大局的な振る舞いが $J(\omega)$ に強く依存していることが見て取れるであろう。例えば η を固定して温度に対する依存性をみれば、ピークが現れる場合が存在し、確率極限近似によって導入された“量子ノイズ”による確率共鳴現象がおこりうることを示唆している。また、温度を固定して η 依存性を調べてみると SNR の二つのピーク（ダブルレゾナンス）が存在し、その間に SNR が 0 になる点（アンチレゾナンス）が存在することなど、面白い現象をみることができる（ η を固定して温度依存性を調べても同じことが起こり得る）（図 5, 6, 7）。これらの現象は、 σ^β に強く依存しており例えば繰り込み処方により σ^β が何らかの変更を受ければ、それに応じて SNR の振る舞いも大幅に変わることを強調しておく。最後に、ダブルレゾナンスやアンチレゾナンスといった一風変わった現象を理解を助けるために、振幅 A^β の η 依存性について触れておこう。¹⁸

(38) に (41) を代入して調べてみると

$$A^\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_0 = \frac{\tilde{\omega}_0}{\tilde{\sigma}^\beta} \quad (45)$$

¹⁶ 講演ではシグナル・ノイズ比をとらず振幅 A^β そのものの振る舞いについて述べた。今回は慣例に従いシグナル・ノイズ比についてのべることにした。

¹⁷ 仮に H_a が存在しなければ、これら二つの系の熱平衡状態は同じである。

¹⁸ SNR の η 依存性は解析的な評価が難しいので、替りに振幅の η 依存性を調べた。温度依存性についての解析的な評価は SNR にしても振幅にしても難しい。

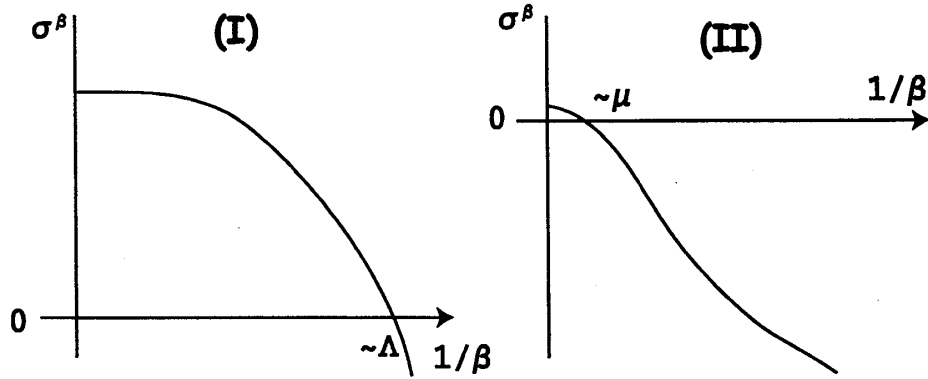


図 4: σ^β の温度依存性 (概念図)。(I) オーミックケースでは $1/\beta \sim \Lambda$ あたりまで正の値を取り、(II) コンスタントケースでは $1/\beta \sim \mu$ のあたりから負の値をとる。

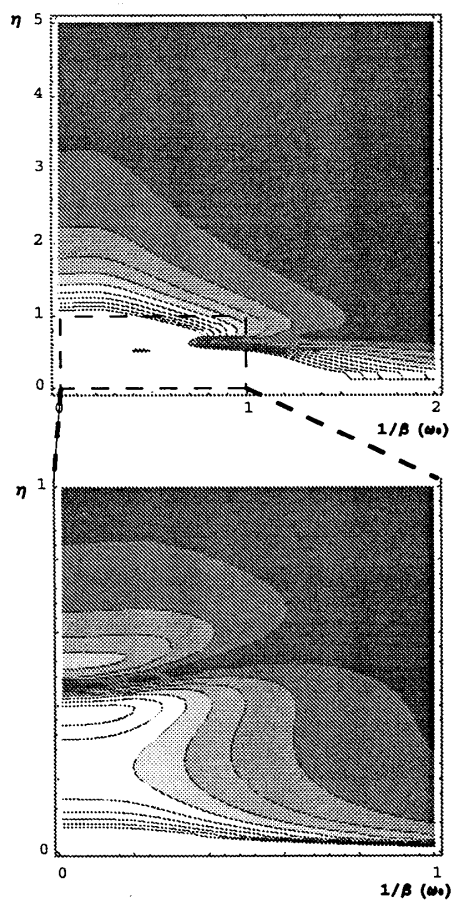
$$\frac{d}{d\eta} A^\beta = 0 \quad \Rightarrow \quad \eta_{\pm} = \eta_0 \left(1 \pm \sqrt{\frac{\tilde{\sigma}^{\beta 2} (\tilde{\Omega}/\tilde{\omega}_0)^2 + \tilde{\gamma}^{\beta 2}}{\tilde{\sigma}^{\beta 2} + \tilde{\gamma}^{\beta 2}}} \right) \quad (46)$$

と、 $\eta > 0$ より図 8 の関係が得られる。図 6、7 にみられたダブルレゾナンスは SNR に対するものであり、 η_{\pm} と直接対応するものではないが、それらが存在することが図 7 のダブルレゾナンスが存在するための必要条件になっていることに注意してほしい。また η_0 の存在はアンチレゾナンスが存在するための必要十分条件そのものである。

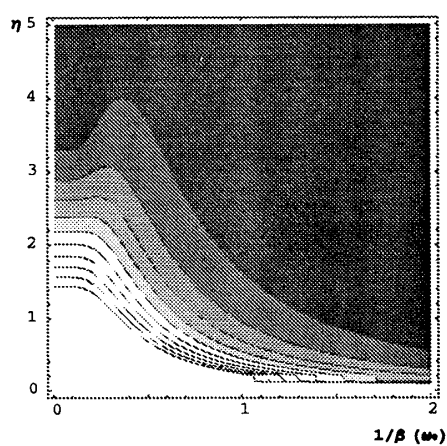
6 まとめ

まずは、ここまでの話をまとめておこう。我々は、周期的摂動の加えられたスピنبोजンモデルに対し、確率極限近似を適用しそのダイナミクスを調べた。その結果、適当に定義されたシグナル・ノイズ比 (SNR) が、あるパラメータで最大値をとる現象が見られ、この近似によって導入された“量子論的ノイズ”による「確率共鳴現象」を確認することができた。またダブルレゾナンスやアンチレゾナンスといった興味深い振る舞いも見られたが、これらは熱浴との相互作用による周波数シフトの温度依存性（構造因子 $J(\omega)$ によって決定される）に大きく依存していた。即ち、パラメータ空間における SNR の振る舞いはボソン系の構造因子 $J(\omega)$ の形そのものに大きく依存することがわかったわけだが、これらは注目するシステムと“ノイズ”を与えるシステムの相互作用の効果をまじめに計算してはじめて得られる知見であり、現象論的量子ランジュバン方程式から議論をはじめても到達することができない大切な部分であることを強調しておきたい。

最後にこの計算に対応する実験的研究を行う上で注意すべき点について簡単に触れておくことにしよう。一つはタイムスケールの変換についてである。確率極限近似の方法は、ミクロなタイムスケール t から始めてマクロなタイムスケール τ を導入しているが、もちろん実験で測定される量のうち、興味があるのは τ に支配されている量である。このことは例えば指数関数的緩和現象が観測される系であれば、それはすでにタイムスケール τ で実験を行っているということを意味しており、このような量を扱っているかぎり、スケール変換に対応する実験の具体的操作をあえて考える必要は全くな



(I)



(II)

図 5: (44) で定義された SNR の η -温度依存性 (等高線グラフ)。(I) の方は原点付近の拡大図をつけてある。 $\Delta/\omega_0 = 1/2$, $\Lambda/\omega_0 = 10$, $\mu/\omega_0 = 0.5$, $\Omega/\omega_0 = 0.1$

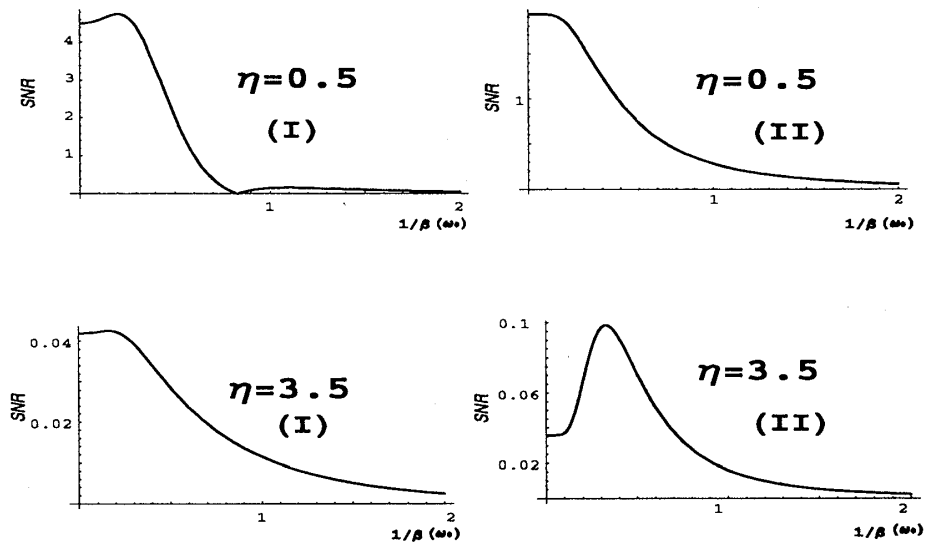


図 6: SNR の温度依存性 (I) オーミック、(II) コンスタント)。例えばオーミックケースで $\eta = 0.5$ のとき (左上のグラフで)、ある温度で SNR が最大値をとり (確率共鳴現象)、さらに温度が高くなると SNR が 0 になる温度が存在し (アンチレゾナンス) さらに高温側でもう一つのピークが存在する (ダブルレゾナンス) ことなどが確認できる。パラメータの値は図 5 と同じ。

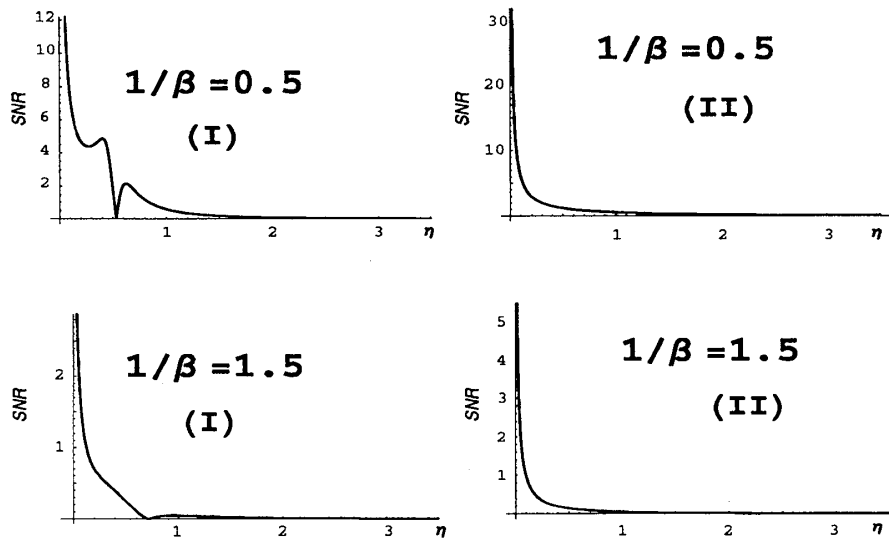
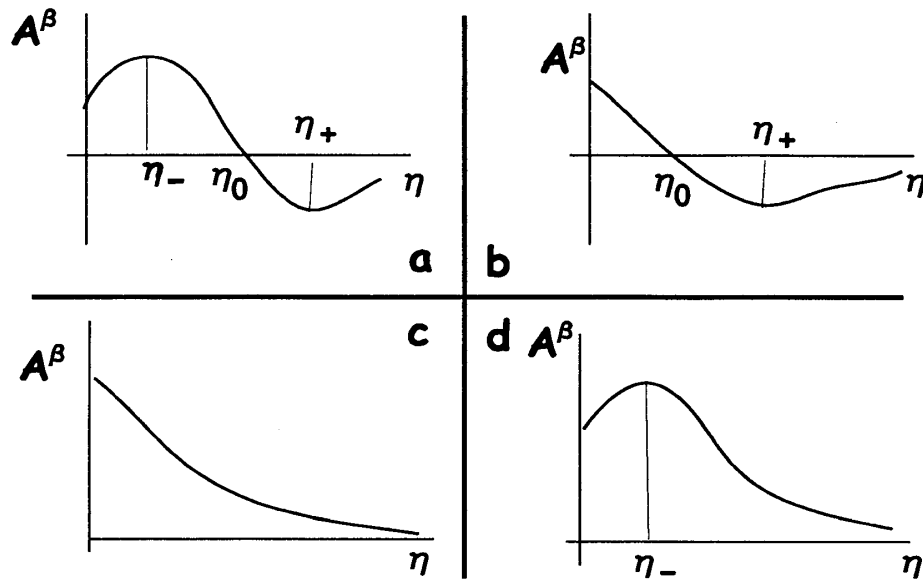


図 7: SNR の η 依存性 (I) オーミック、(II) コンスタント)。例えばオーミックケースで $1/\beta = 0.5$ のとき (左上のグラフで)、ダブルレゾナンスとアンチレゾナンスが見えている。パラメータの値は図 5 と同じ。



	$\tilde{\sigma}^\beta$	$\tilde{\Omega}/\tilde{\omega}_0$	η_-	η_0	η_+
a	+	< 1	○	○	○
b	+	> 1	×	○	○
c	-	< 1	×	×	×
d	-	> 1	○	×	×

図 8: 線形応答の振幅 A^β の η 依存性

い。二つめは、(量子力学的実験すべてに言えることだが) 通常、“初期状態”を正しく用意することは非常に難しい。しかしながらここで扱った SNR は、時間 $\tau \gg 1/\gamma_\beta$ で得られる定常状態から得られる情報であり初期状態には依存しない量である。この点から考えると、楽に実験が行えるのではないかという期待をもつことができる。三つめとして $J(\omega)$ の制御についてであるが、空洞内に閉じ込められた電磁場 (ボソン系に対応) と原子 (スピン系に対応) との相互作用を調べる Cavity QED で、電磁場のモード ($J(\omega)$ に対応) の変化に基づいた原子の不安定状態の寿命の制御が成功していることは既に述べた。すなわち、Cavity QED で研究されている系において、(何らかの近似の意味においても) ハミルトニアン (15) が実現されれば、検証実験への適用が見込めるのではないだろうか。その他、克服しなければならない技術的困難も少なからず存在するが、以上のような理由により我々はここで扱った問題が十分に実験的検証可能な範囲にあるのではないかと考えている。またこのような実験的検証は確率極限近似そのものの実験的検証にもなっており、より重要な意味を持っていることも注意したい。

参考文献

- [1] R. Benzi, G. Parisi, A. Suter, and A. Vulpiani, *Tellus* **34** (1982) 10.
- [2] L. Gammaitoni, P. Hänggi, P. Jung and F. Marchesoni, *Rev. Mod. Phys.* **70** (1998) 223. この文献の中の参考文献も参照してください。
- [3] 内山智香子, *パリティ* Vol. 13, No. 6 (1998) 20.
- [4] L. Accardi, A. Frigerio and Y. G. Lu, *Commun. Math. Phys.* **131** (1990) 537;
L. Accardi, J. Gough and Y. G. Lu, *Rep. Math. Phys.* **36** (1995) 155.
- [5] L. Accardi, S. V. Kozyrev and I. V. Volovich, *Phys. Rev.* **A56** (1997) 2557.
- [6] H. Umezawa, “場の量子論：ミクロ, マクロ, そして熱物理学の最前線” (培風館, 1995).